

$$\text{Číselně: } c^2 = 32,4^2 + 16,2^2 \doteq 1\,050 + 262,4 = 1\,312,4,$$

$$c \doteq 36,2 \text{ (m)},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{32,4}{16,2} = 2,$$

$$\alpha \doteq 63^\circ 30',$$

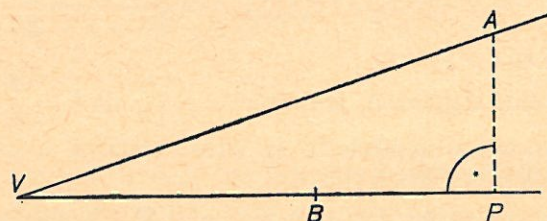
$$\beta = R - \alpha \doteq 26^\circ 30'.$$

Jiný postup: Vypočteme úhel α , pak $\sin \alpha = \frac{a}{c}$, odtud $c = \frac{a}{\sin \alpha}$. Kdybychom užili vzorce $\cos \alpha = \frac{b}{c}$, bylo by $c = \frac{b}{\cos \alpha}$.

Příklad 1. Bez užití úhloměru určete velikost narýsovaného ostrého úhlu.

Řešení: Necht $\widehat{AVB}$ je ostrý úhel α (obr. 110).

Bodem A vedme kolmici k přímce VB a označme P její patu. Odměříme úsečky AP , VP . Dostaneme např. $AP = 28 \text{ mm}$, $VP = 65 \text{ mm}$. Vypočteme $\operatorname{tg} \alpha = \frac{AP}{VP} = \frac{28}{65} = 0,4308$. Nejblíže hod-



Obr. 110

nota k číslu 0,4308, kterou můžeme nalézt v tabulkách pro $\operatorname{tg} \alpha$, je 0,4314. Odpovídá jí $\alpha = 23^\circ 20'$, což je velikost narýsovaného úhlu.

Protože tento způsob určování velikosti úhlu se opírá jen o měření úseček, je přesnější než přímé měření úhlu úhloměrem.

Cvičení

- Jaké úhly svírají úhlopříčky v obdélníku o stranách $a = 50$, $b = 80$?
- Řešte pravoúhlý trojúhelník, jsou-li dány odvěsny:
 - $a = 408 \text{ m}$, $b = 145 \text{ m}$;
 - $a = 76,5 \text{ m}$, $b = 171 \text{ m}$;
 - $a = 672 \text{ m}$, $b = 185 \text{ m}$.
- V jakém úhlu stoupá schodiště, je-li každý schod 18 cm vysoký a 26 cm široký?
- Strom vysoký 3 m vrhá stín dlouhý 4,5 m. V jakém úhlu dopadají světelné paprsky na vodorovnou rovinu?
- Cesta stoupá rovnoměrně na vzdálenost 1 km o 75 m. V jakém úhlu stoupá?

c) Řešte pravoúhlý trojúhelník, je-li dána přepona c a úhel α ($c = 6,5 \text{ m}$, $\alpha = 35^\circ 30'$).

$$\text{Odvěsna } b: \cos \alpha = \frac{b}{c}, b = c \cdot \cos \alpha.$$

$$\text{Odvěsna } a: \sin \alpha = \frac{a}{c}, a = c \cdot \sin \alpha.$$

$$\text{Úhel } \beta: \beta = R - \alpha.$$

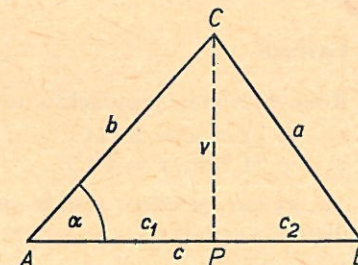
$$\text{Číselně: } \beta = 54^\circ 30'.$$

$$b = 6,5 \cdot \cos 35^\circ 30' \doteq 5,6 \cdot 0,8141 \doteq 5,29165 \doteq 5,3 \text{ (m)},$$

$$a = 6,5 \cdot \sin 35^\circ 30' \doteq 6,5 \cdot 0,5807 \doteq 3,77455 \doteq 3,8 \text{ (m)}.$$

Příklad 2. V trojúhelníku ABC (není pravoúhlý) je dáno: $BC = a = 100$, $AC = b = 125$, $\sphericalangle BAC = \alpha = 48^\circ 25'$. Určete další jeho prvky (obr. 111).

Řešení: Protože umíme řešit jen úlohy o pravoúhlém trojúhelníku, rozdělíme daný trojúhelník výškou $CP = v$ na dva pravoúhlé trojúhelníky, CAP a CBP . (O tom, že výška CP daný trojúhelník vskutku roz-



Obr. 111

dělí, se přesvědčíme z náčrtku např. v měřítku 1 : 20 v centimetrech.)

Úseky AP a BP označíme c_1 a c_2 .

Z náčrtku vidíme, že v pravoúhlém trojúhelníku APC známe přeponu $AC = b$ a úhel α . Postupujeme tedy takto:

$$\begin{aligned} v &= b \cdot \sin \alpha, \\ v &\doteq 125 \cdot 0,7480 \doteq 93,5, \\ c_1 &= b \cdot \cos \alpha, \\ c_1 &\doteq 125 \cdot 0,6637 \doteq 83. \end{aligned}$$

V pravoúhlém trojúhelníku CBP známe přeponu $BC = a$ i odvěsnu $PC = v$. Proto postupujeme takto:

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \frac{v}{a}, \\ \sin \beta &\doteq 93,5 : 100 = 0,935, \\ \beta &= 69^\circ 14'. \end{aligned}$$

Úsek c_2 bychom mohli počítat podle Pythagorovy věty; rychlejší však bude výpočet ze vztahu $\cos \beta = \frac{c_2}{a}$.

$$\begin{aligned} c_2 &= a \cdot \cos \beta, \\ c_2 &\doteq 100 \cdot 0,3546 \doteq 35,5. \end{aligned}$$

Protože $c = c_1 + c_2$, je

$$c \doteq 118.$$

Konečně $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, takže

$$\gamma = 62^\circ 21'.$$

Kontrolujte graficky v náčrtku.

Cvičení

- Řešte pravoúhlý trojúhelník určený přeponou c a úhlem α :
a) $c = 13$ m, $\alpha = 28^\circ 14'$; b) $c = 505$ m, $\alpha = 48^\circ 17'$;
c) $c = 51,5$ m, $\alpha = 45^\circ 30'$.
- Jak vysoko je okno, jestliže právě k němu dosahuje žebřík 12,2 m dlouhý a svírající s vodorovnou zemí úhel 58° ?
- Rovnoramenný trojúhelník má základnu $z = 10$ cm a úhel při základně $\alpha = 67^\circ 30'$. Vypočítejte jeho obsah.

- Rovnoramenný trojúhelník má rameno $b = 5$ cm a úhel, při základně $\alpha = 75^\circ$. Určete velikost základny a výšky kolmé k základně.

- Letadlo letělo ve výšce 1 700 m právě nad továrnou. Bylo v té chvíli pozorováno ve výškovém úhlu 25° . Jak daleko byl pozorovatel od továrny? (Předpokládáme vodorovnou krajinu.)

d) Řešte pravoúhlý trojúhelník, je-li dána odvěsna a a úhel α ($a = 136$ m, $\alpha = 35^\circ 30'$).

$$\text{Odvěsna } b: \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}, \quad b = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha} = a \cdot \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$\text{Přepona } c: \sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad c = \frac{a}{\sin \alpha}.$$

$$\text{Úhel } \beta: \beta = R - \alpha.$$

$$\text{Číselně: } \beta = R - 35^\circ 30' = 54^\circ 30'.$$

$$\begin{aligned} b &= 136 \cdot \operatorname{ctg} 35^\circ 30' \doteq 136 \cdot 1,4019 \doteq 190,658 \doteq \\ &\doteq 191 \text{ (m)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c &= 136 : \sin 35^\circ 30' \doteq 136 : 0,5807 \doteq 234,2 \doteq \\ &\doteq 234 \text{ (m)}. \end{aligned}$$

Příklad 3. Pozorovatel vysoký $1\frac{3}{4}$ m stojí na rovině a vidí

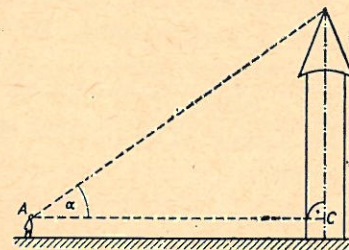
vrchol věže vysoké 30 m pod výškovým úhlem $\alpha = 26^\circ 40'$ (obr. 112). V jaké vzdálenosti od paty věže stojí pozorovatel?

Řešení: Podle obr. 112 je vzdálenost AC pozorovatele od paty věže odvěsnou pravoúhlého trojúhelníku, jehož druhá odvěsna měří

$$BC = 30 - 1,75 = 28,25 \text{ (m)}.$$

Úhel ležící proti odvěsně BC je $\alpha = 26^\circ 40'$. Protože

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC},$$



Obr. 112

ej

$$AC = \frac{BC}{\operatorname{tg} \alpha},$$

tj.

$$AC = \frac{28,25}{0,5022} \doteq 56 \text{ (m)}.$$

Cvičení

16. Jak vysoká je vyhlídková věž, vidíme-li ji ze vzdálenosti 120 m ve výškovém úhlu $32^\circ 15'$?
17. Stín stromu je dlouhý 12,5 m. Sluneční paprsky dopadají pod úhlem $26^\circ 15'$. Jak vysoký je strom?
18. Řešte rovnoramenný trojúhelník, je-li rameno $r = 14,25$ cm, úhel při základně $\alpha = 54^\circ 30'$.
19. Řešte pravoúhlý trojúhelník, je-li dána odvěsna a úhel α :
 a) $a = 168$ m, $\alpha = 60^\circ 31'$; b) $a = 175$ m, $\alpha = 72^\circ 13'$;
 c) $a = 16,5$ m, $\alpha = 17^\circ 12'$.
20. Jak vysoká je věž, vrhá-li stín dlouhý 25 m a dopadá-li světlo pod úhlem 50° ?

V číselných výsledcích jsme ponechávali tolik číslic, kolik jich má nejméně přesné z daných čísel. V běžné praxi jde nejvýše o čtyřmístná čísla. Další číslice mezivýpočtů jsou proto nepřesné a bezvýznamné. Proto jsme získané výsledky zaokrouhlovali na dvě nebo na tři platné číslice. Podobně úhly měříme v běžné praxi nejvýše na minuty nebo spíše jen na desítky minut. Theodolitem lze měřit úhly s přesností asi na 3 minuty.

B. Aplikace řešení pravoúhlého trojúhelníku

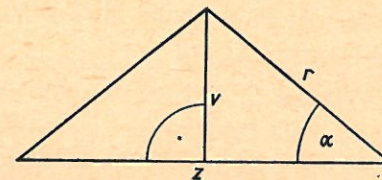
Vypočítejte obsah P pravoúhlého trojúhelníku určeného různými prvky.

1. Jsou dány dvě odvěsny a, b . Pak $P = \frac{1}{2} ab$.

2. Je dána přepona c a úhel α . Pak $a = c \cdot \sin \alpha$, $b = c \cdot \cos \alpha$,
 $P = \frac{1}{2} c^2 \sin \alpha \cos \alpha$. Výsledek lze upravit ve tvaru $P = \left(\frac{c}{2}\right)^2 \sin 2\alpha$.

3. Je dána odvěsna b a úhel β . Pak $a = b \cdot \cotg \beta$, $P = \frac{1}{2} b \cdot b \cotg \beta = \frac{1}{2} b^2 \cotg \beta$.

Příklad 4. Pozemek má tvar rovnoramenného trojúhelníku. Jeho základna je dlouhá 88 m, rameno je dlouhé 53 m. Určete plošnou výměru pozemku a úhly, které svírají strany pozemku (obr. 113).



Obr. 113

Řešení: Výška v kolmá k základně z rozdělí daný trojúhelník na dva pravoúhlé trojúhelníky, z nichž každý má přeponu délky $r = 53$ (m), odvěsnu délky $\frac{z}{2} = 44$ (m). Plošnou výměru budeme počítat podle vzorce pro obsah trojúhelníku

$$P = \frac{z}{2} \cdot v.$$

Výšku v bychom mohli počítat podle Pythagorovy věty. Protože však máme určit také velikost úhlu α , bude úspornější postupovat takto:

$$\cos \alpha = \frac{z}{2} : r = \frac{z}{2r},$$

$$\sin \alpha = \frac{v}{r}, \text{ tj. } v = r \cdot \sin \alpha.$$

Číselně:

$$\cos \alpha = \frac{44}{53} \doteq 0,8302.$$

Odtud podle tabulek

$$\alpha = 33^\circ 50',$$

neboť $\cos 33^\circ 40' \doteq 0,832\ 3$, $\cos 34^\circ \doteq 0,829\ 0$.

Dále určíme

$$v = 53 \cdot 0,556\ 8 \doteq 29,5\ (\text{m}).$$

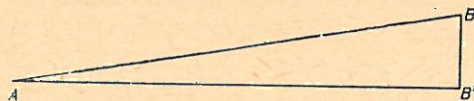
Hledaná plošná výměra je

$$P = 44 \cdot 29,5 \doteq 1\ 298\ (\text{m}^2).$$

Odpověď: Strany pozemku svírají úhly o velikostech $33^\circ 50'$, $33^\circ 50'$, $112^\circ 20'$ (tento úhel jsme nepočítali); plošná výměra je asi $1\ 300\ \text{m}^2$, tj. 13 arů.

Příklad 5. Určete stoupání cesty z místa A do místa B podle mapy, jejíž měřítko je $1 : 75\ 000$. Cesta stoupá rovnoměrně. Obráz cesty na mapě je $12,5\ \text{mm}$ dlouhý, kóty (nadmořské výšky) bodů A , resp. B , jsou $125\ \text{m}$, resp. $275\ \text{m}$.

Řešení: Víme, že na mapě není zakreslena skutečná cesta, ale její průmět do vodorovné roviny. Vyrovnáme-li cestu AB do úsečky (beze změny stoupání), pak sama cesta AB , její průmět AB' do úrovně místa A a převýšení BB' místa B nad úroveň místa A vytvoří pravoúhlý trojúhelník ABB' s pravým úhlem při vrcholu



Obr. 114

B' (obr. 114). Úhel stoupání $\varphi = \sphericalangle BAB'$. Z trojúhelníku ABB' zjišťujeme:

$$BB' = 275 - 125 = 150\ (\text{m})\ (\text{rozdíl nadmořských výšek míst } A, B)$$

$$AB' = 12,5 \cdot 75\ 000\ \text{mm} = 937,5\ \text{m}$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{BB'}{AB'} = 150 : 937,5 \doteq 0,160\ 0$$

$$\varphi \doteq 9^\circ 5'.$$

Stoupání cesty se často vyjadřuje jako hodnota funkce tangens úhlu stoupání φ , tedy $\text{tg } \varphi = 0,16$.

Jindy se vyjadřuje v procentech. V tomto případě se udává, kolik procent délky skutečné cesty činí výškový rozdíl.

V našem případě je to

$$\frac{100 \cdot BB'}{AB}.$$

Protože

$$AB = AB' : \cos \varphi,$$

$$AB = 937,5 : 0,987\ 4 \doteq 949,5\ (\text{m}),$$

je stoupání v %

$$15\ 000 : 949,5 \doteq 16\ (\%).$$

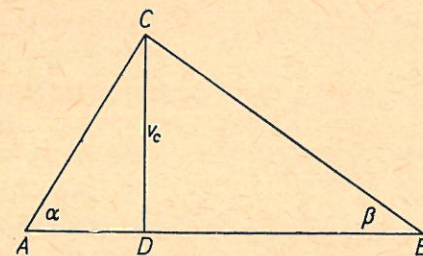
(Stoupání v % při malých úhlech stoupání φ se přibližně rovná $\text{tg } \varphi$.)

Příklad 6. Řešte pravoúhlý trojúhelník, je-li dáno: $v_c = 5$, $\alpha = 48^\circ$ (obr. 115).

Řešení: Symbolem v_c rozumíme výšku na přeponu c . Tato výška rozdělí daný trojúhelník na dva pravoúhlé trojúhelníky APC a BPC , kde P je pata výšky.

V trojúhelníku APC známe odvěsnu v a protilehlý úhel α .

$$\text{Pak je } \sin \alpha = \frac{v}{b},\ b = \frac{v}{\sin \alpha}.$$



Obr. 115

V trojúhelníku BPC vypočteme obdobně z odvěsny v a přílehlého úhlu α stranu a : $\cos \alpha = \frac{v}{a}$, $a = \frac{v}{\cos \alpha}$.

Přeponu c pak určíme z odvěsny b a úhlu α : $c = \frac{b}{\cos \alpha}$;

dosaďme-li $b = \frac{v}{\sin \alpha}$, dostaneme $c = \frac{v}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$.

$$\text{Obsah } P = \frac{1}{2} cv = \frac{v^2}{2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}.$$

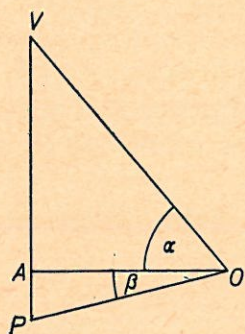
$$\text{Číselně: } b = \frac{5}{\sin 48^\circ} \doteq 5 : 0,743 \, 1 \doteq 6,7,$$

$$a = \frac{5}{\cos 48^\circ} \doteq 5 : 0,669 \, 1 \doteq 7,5,$$

$$c = \frac{5}{\sin 48^\circ \cdot \cos 48^\circ} \doteq \frac{5}{0,743 \, 1 \cdot 0,669 \, 1} = 5 : 0,497 \, 2 \doteq 10,1,$$

$$P = \frac{5^2}{2 \cdot \sin 48^\circ \cdot \cos 48^\circ} = \frac{25}{2 \cdot 0,497 \, 2} = 25 : 0,994 \, 1 \doteq 25,1.$$

Příklad 7. Z okna, které je 8 m nad zemí, vidíme vrchol věže ve výškovém úhlu $\alpha = 50^\circ$, patu věže v hloubkovém úhlu $\beta = 14^\circ$. Určete výšku věže. (Obr. 116.)



Obr. 116

Řešení: Na obr. 116 je vyznačeno místo pozorovatele, vrchol věže V , pata P . Bod H je zvolen tak, že HP se rovná výšce okna nad zemí, $HP = 8$ (m). Výškový úhel $\alpha = \sphericalangle HOV$, hloubkový úhel $\beta = \sphericalangle HOP$.

V pravoúhlém trojúhelníku HOP známe odvěsnu $HP = 8$, úhel protilehlý k odvěsně HP je $\beta = 14^\circ$.

$$\text{Proto } \cotg \beta = \frac{HO}{HP}, HO = HP \cdot \cotg \beta.$$

$$\text{Platí: } \frac{HV}{HO} = \tg \alpha, HV = HO \cdot \tg \alpha = HP \cdot \cotg \beta \cdot \tg \alpha.$$

$$\text{Číselně: } HV = 8 \cdot \cotg 14^\circ \cdot \tg 50^\circ,$$

$$HV = 8 \cdot 4,010 \, 8 \cdot 1,191 \, 8 \doteq 38,240 \, 6 \doteq 38 \text{ (m)},$$

$$PV \doteq 38 + 8 = 46 \text{ (m)}.$$

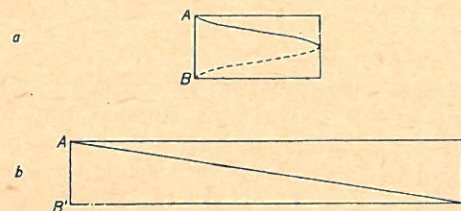
Poznámka. (Pokyny pro řešení úloh.)

Máme-li řešit úlohu, ve které se vyskytnou složitější obrazce než pravoúhlý trojúhelník, snažíme se rozdělit obrazec na pravoúhlé trojúhelníky, v nichž by aspoň dva prvky byly známy. Tak se postupuje při řešení pravidelného mnoho-

úhelníku, lichoběžníku apod. Např. v lichoběžníku vytvoříme pravoúhlé trojúhelníky sestrojením výšek v krajních bodech kratší základny.

Cvičení

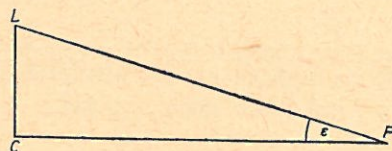
1. Válcová věž má vnitřní průměr 6 m. Pod jakým úhlem stoupají v této věži točité schody na vnějším obvodu schodiště, jestliže po jednom otočení vystoupí o 3 m? (Náčrt podle obr. 117.)



Obr. 117

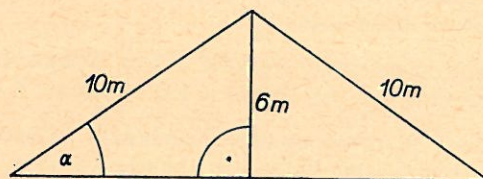
2. Vypočtete úhel stoupání šroubového závitu, který se při jednom otočení šroubu o průměru 12,3 mm posune o 3,5 mm ve směru osy šroubu. (Rozvineme-li válcovou plošku, na níž je závit, do obdélníku, rozvine se závit do úhlopříčky obdélníku. Výška AB závitu je výškou obdélníku a obvod válce je jeho základnou. Obr. 117.)
3. Z vrcholu pahorku, který je 75 m nad úrovní krajiny, je vidět přesně za sebou dvě lodky. Hloubkový úhel jedné z nich je 64° , druhé 48° . Určete vzdálenosti obou loděk.
4. Baterie je umístěna na útesu vysokém 150 m. V hloubkovém úhlu 9° je odtud pozorována loď. Jak daleko je loď od baterie?
5. Příčný řez náspu je rovnoramenný lichoběžník se spodní základnou dlouhou 7 m, horní 4 m. Boky jsou skloněny v úhlu $42^\circ 30'$. Určete obsah řezu a množství zeminy navezené na stometrovém úseku náspu.
6. Příčný řez kanálem má tvar lichoběžníku. Šířka dna je 2 m, hloubka 5 m, stěny jsou skloněny v úhlech 40° a 35° . Vypočtete horní šířku kanálu, obsah příčného řezu a množství vody ve stometrovém úseku kanálu, sahá-li do výše 4 m.
7. Určete výškový rozdíl dvou stanic lanovky, jejíž stoupání je 35° , je-li přímá vzdálenost mezi oběma stanicemi 1 600 m.

8. Letec hlásí dělostřelecké pozorovatelně, že je právě nad cílem ve výšce 2 530 m. Z pozorovatelný vidí v té chvíli letadlo pod výškovým úhlem $\varepsilon = 22^\circ 16'$ (obr. 118). Jak daleko od pozorovatelný je cíl?



Obr. 118

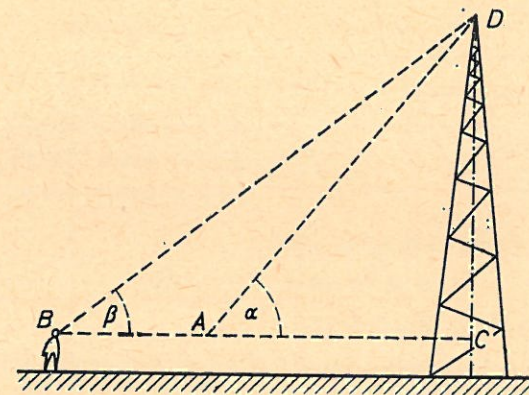
9. Stoupání či klesání železniční trati se udává v promile (1‰ stoupání znamená, že na 1 km trati stoupne trať o 1 m.) Vypočítejte, o kolik m je přímá stoupající trať, dlouhá 1,25 km, při stoupání 13‰ delší, než kdyby ve stejném úseku šla trať vodorovně.
10. Horizontální vzdálenost mezi vysazovanými stromky má být všude rovna 3 m. V jaké vzdálenosti ve směru svahu se budou kopat jámy, je-li úhel sklonu stráně $24^\circ 45'$ (nebo $50^\circ 10'$)?
11. Čtyřboký pravidelný jehlan má hrany podstavy $a = 6,2$ a odchylku pobočné hrany od roviny podstavy $65^\circ 40'$. Vypočítejte povrch a objem jehlanu.
12. Rotační kužel má průměr podstavy 18,6 cm, úhel při vrcholu $\varepsilon = 38^\circ 20'$. Vypočítejte jeho povrch a objem.
13. Povrch kužele je $235,5\text{ dm}^2$, jeho osový řez je rovnostranný trojúhelník. Vypočítejte objem.



Obr. 119

14. Štít budovy na obr. 119 je 6 m vysoký, šikmé hrany jsou dlouhé 10 m. Jak velký je úhel sklonu α šikmých hran štítu a jak je budova široká?
15. Pravoúhlý lichoběžník má ostrý úhel velikosti 50° . Základny lichoběžníku jsou dlouhé 20 cm, 10 cm. Vypočítejte délky ramen,

16. Rovnoramenný trojúhelník má základnu $z = 10\text{ cm}$. Úhel při základně je $\alpha = 67^\circ 30'$. Vypočítejte obsah trojúhelníku.
17. Obdélník má rozměry 32 cm, 19 cm. Určete velikosti úhlů, jež svírá úhlopříčka se stranami obdélníku.
18. Pozorovatel 1,5 m vysoký stojí 100 m od paty stromu. Vidí vrchol stromu pod výškovým úhlem $\alpha = 9^\circ 50'$. Vypočítejte výšku stromu.
19. Voják ležící ve vodorovném terénu vidí telegrafní sloup vysoký 6 m pod úhlem $3^\circ 10'$. V jaké vzdálenosti od telegrafního sloupu leží?



Obr. 120

20. Pozorovatel A je vysoký $1\frac{3}{4}\text{ m}$. Vidí vrchol 40 m vysokého stožáru pod výškovým úhlem $\alpha = 50^\circ$. Stejně vysoký pozorovatel B vidí vrchol téhož stožáru pod výškovým úhlem $\beta = 40^\circ$. Jak daleko od stožáru je každý z pozorovatelů? (obr. 120).

C. Sinová věta

Dosud jsme řešili jen úlohy vedoucí na výpočet prvků pravoúhlého trojúhelníku. Nyní si odvodíme některé základní vzorce platné pro obecný trojúhelník.

11. 23,38 l. 12. 928,62. 13. 3,77 m². 14. 824 m². 15. 164,85 l. 16. 645,4¹
17. 253,25 g. 18. 1 414,43 m. 20. 1 108,80 Kčs.
21. 401,92 m², 904,32 m². 22. 123,088 kg. 23. 8 681,4 min. 24. 384,65 l.
25. 101,29 kg. 26. 6,78 m². 27. 119,7 m³. 28. 20,6 cm. 29. 25,2 m.
30. 71,335 kg.

3. Jehlanová plocha. Jehlanový prostor. Jehlan

1. 9,8 m³. 2. 2 623 968 m. 3. 3,4 m². 4. $v = 9$ cm. $V = 1 122,336$ dm³.
5. 39,17 m². 6. 1 667. 7. 104,85 m³. 8. 1 841,10 Kčs. 10. 10,58 cm.
11. 3 176 tašek. 12. 145 152 dm².

4. Kuželová plocha. Kuželový prostor. Kužel

1. $\frac{2v\sqrt{3}}{3}$. 2. 18,97 cm. 3. 14,86 m². 4. 197,82 m² 5. 58,9 m³. 6. 48,53 m².
7. 616 tab. 8. 11,3 m². 9. 34,6 cm. 10. 0,56 m³. 11. 154,5 m³. 12. 15,9 m.
13. 19,625 m³.

5. Kulová plocha, koule a její části

1. 20 m³. 2. 47 kg. 3. 248,7 m². 4. 2 645 broků. 5. 264 kg. 6. $r = 3$ cm.
7. 2,972 kg. 8. 22 dm. 9. 14 dm, 11 488,21 dm³. 10. $r = 3$ cm. $P = 113,04$ cm².
11. 629,57 kg. 12. 6 359 128 kp.

III. ročník

Goniometrické funkce

C. Tabulky hodnot goniometrických funkcí

1. a) 0,295 15; 0,784 42; 0,994 20; 1,767 49; b) 0,835 49; 0,202 22; 1,743 75; 0,971 33; c) 0,626 15; 0,889 41; 0,953 40; 1,186 14; d) 0,851 73; 0,436 80; 1,837 96; 0,346 93. 2. a) $\alpha = 21^\circ 20'$; $\beta = 36^\circ 40'$; $\gamma = 29^\circ 20'$; $\delta = 9^\circ 30'$; b) $\alpha = 69^\circ 50'$; $\beta = 49^\circ 40'$; $\gamma = 72^\circ 20'$; $\delta = 59^\circ 50'$; c) $\alpha = 43^\circ 14'$; $\beta = 18^\circ 24'$; $\gamma = 39^\circ 43'$; $\delta = 22^\circ 56'$; d) $\alpha = 56^\circ 38'$; $\beta = 51^\circ 18'$; $\gamma = 70^\circ 7'$; $\delta = 59^\circ 2'$. 3. Výsledky pro příslušnou goniometrickou funkci a úhel viz v tabulkách goniometrických funkcí. 4. a) $\alpha = 10^\circ$; b) $\beta = 14^\circ 40'$; c) $\gamma = 43^\circ 20'$; d) $\gamma = 70^\circ 40'$; e) $\delta = 27^\circ$; f) $\omega = 13^\circ 45'$.

D. Orientovaný úhel

1. -6° , -90° , -180° , -360° , $-1 080^\circ$, $n(-360^\circ)$. 2. a) 6 h 45 minut; b) 8 h 40 min; c) 16 h 15 min. 3. $\omega = 4\pi$ rad/s $\doteq 12,564$ rad/s.
4. $\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} = 7,272 \cdot 10^{-5}$ rad/s.

K. Tabulky hodnot logaritmů goniometrických funkcí

1. a) 9,963 05—10; b) 9,974 12—10; c) 9,850 06—10; d) 9,413 70—10. 2. a) 9,425 35—10; b) 9,739 31—10; c) 9,912 58—10; d) 10,015 74—10. 3. a) $\alpha = 23^\circ 16'$; b) $\beta = 60^\circ 28'$; c) $\gamma = 49^\circ 35'$; d) $\delta = 36^\circ 32'$. 4. a) $\alpha = 68^\circ 2' 36''$; b) $\beta = 74^\circ 24' 25''$; c) $\gamma = 82^\circ 44' 13''$; d) $\delta = 48^\circ 24' 55''$.

N. Základní vztahy mezi goniometrickými funkcemi

1. $\cos \alpha = \pm \frac{24}{25}$, $\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{7}{24}$, $\operatorname{cotg} \alpha = \pm \frac{24}{7}$. 2. $\sin \beta = \pm \frac{4\sqrt{41}}{41}$, $\cos \beta = \pm \frac{5\sqrt{41}}{41}$, $\operatorname{cotg} \beta = \frac{5}{4}$. 3. $\sin \omega = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \omega = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg} \omega = -\frac{1}{2}$. 4. $\sin \varphi = \pm \frac{\sqrt{91}}{10}$, $\operatorname{tg} \varphi = \pm \frac{\sqrt{91}}{3}$, $\operatorname{cotg} \varphi = \pm \frac{3\sqrt{91}}{91}$. 5. a) $\cos^3 \alpha$; b) $\sin \alpha$; c) 2; d) $\operatorname{cotg}^2 \alpha$; e) $2 \cdot \operatorname{tg} \alpha$; f) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$. 6. Dané identity platí.

O. Funkce součtu úhlů a součet funkcí

1. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \alpha + \sin \alpha)$; b) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \alpha - \sin \alpha)$; c) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \alpha - \sin \alpha)$; d) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \alpha + \sin \alpha)$; e) $\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha}$; f) $\frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}$. 2. a) 1; b) 0; c) $\frac{2}{4}$; d) $\frac{11}{10}$. 3. a) $\sqrt{3} \cos \alpha$; b) $\sqrt{3} \cdot \sin \alpha$; c) $\sqrt{3} \cdot \sin \alpha$; d) $\sqrt{3} \cdot \cos \alpha$.
4. Dané identity platí. 5. a) $\frac{7}{9}$; b) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$; c) $\frac{24}{25}$.

P. Základní goniometrické rovnice

1. a) $x = 40^\circ 20'$; $139^\circ 40'$; b) $x = 70^\circ$; 290° ; c) $x = 62^\circ 50'$; $242^\circ 50'$; d) $x = 52^\circ 40'$; $232^\circ 40'$; e) $x = 232^\circ$; 308° ; f) $x = 139^\circ 40'$; $220^\circ 20'$; g) $\alpha = 111^\circ 40'$; $291^\circ 40'$; h) $x = 159^\circ$; 339° . 2. a) $x = 240^\circ$; 300° ; b) $x = 135^\circ$; 225° ; c) $x = 150^\circ$; 330° ; d) $x = 30^\circ$; 210° . 3. a) $x = 60^\circ$; 120° ; b) $x = 45^\circ$; 225° ; c) $x = 60^\circ$; 300° ; d) $x_1 = 36^\circ 52' 11''$; $143^\circ 7' 49''$, $(\sin x)_2 = 2$ nevyhovuje. 4. $x_1 = 75^\circ$; 225° ; $x_2 = 15^\circ$; 195° .

II. Trigonometrické řešení pravoúhlého a obecného trojúhelníku

A. Řešení pravoúhlého trojúhelníku

1. a) $a = 55,9$; $\alpha = 48^\circ 11' 28''$; $\beta = 41^\circ 48' 39''$; b) $b = 8,933$; $\alpha =$

$= 43^\circ 54' 43''$; $\beta = 46^\circ 5' 17''$. 2. a) $b = 385$ m; $\alpha = 55^\circ 6' 20''$; $\beta = 34^\circ 53' 40''$; b) $a = 228$ m; $\alpha = 47^\circ 15' 28''$; $\beta = 42^\circ 44' 32''$; c) $b = 3,33$ m; $\alpha = 62^\circ 39' 30''$; $\beta = 27^\circ 20' 30''$. 3. $c = 12$; $b = 9,6$; $\alpha = 36^\circ 52' 11''$; $\beta = 53^\circ 7' 49''$. 4. $v = 8,6$; $\alpha = 73^\circ 52' 17''$; $\beta = 32^\circ 15' 26''$. 5. $u_1 = 81,57$; $u_2 = 38,03$; $v = 28,92$. 6. $\alpha = 32^\circ 20'$; $\beta = 57^\circ 59' 40''$. 7. a) $c = 433$ m; $\alpha = 70^\circ 26' 6''$; $\beta = 19^\circ 33' 54''$; b) $c = 187,3$ m; $\alpha = 24^\circ 6' 7''$; $\beta = 65^\circ 53' 53''$; c) $c = 697$ m; $\alpha = 74^\circ 37' 30''$; $\beta = 15^\circ 22' 30''$. 8. $\alpha = 34^\circ 41' 42''$. 9. $\alpha = 33^\circ 41' 24''$. 10. $4^\circ 18'$.

11. a) $a = 44,05$ m; $b = 11,72$ m; $\beta = 61^\circ 46'$; b) $a = 376,9$ m; $b = 336,1$ m; $\beta = 41^\circ 43'$; c) $a = 36,73$ m; $b = 36,1$ m; $\beta = 44^\circ 30'$. 12. $10,6$ m. 13. $230,97$ cm². 14. $v = 4,83$ cm; $z = 2,68$ cm. 15. $3\ 646$ m. 16. 76 m. 17. $6,16$ m. 18. $z = 16,55$ cm, úhel proti z je 71° . 19. a) $\beta = 29^\circ 29'$; $b = 95$ m; $c = 193$ m; b) $\beta = 17^\circ 47'$; $b = 56,1$ m; $c = 183,7$ m; c) $\beta = 72^\circ 48'$; $b = 53,3$ m; $c = 54,8$ m. 20. $29,8$ m.

B. Aplikace řešení pravouhlého trojúhelníku

1. $9^\circ 2'$. 2. $5^\circ 25'$. 3. $30,9$ m. 4. 959 m. 5. $7,56$ m²; 756 m³. 6. $15,1$ m; 43 m²; $2\ 900$ m³. 7. $917,7$ m. 8. $958,7$ m. 9. Asi 1 m. 10. $3,29$ m ($4,68$ m). 11. $124,1$; $437,1$. 12. $V = 2\ 423,3$ cm³; $S = 10\ 994$ cm². 13. $226,6$ dm³. 14. $36^\circ 52'$; 16 m. 15. $11,9$ cm; $15,55$ cm. 16. 27 cm³. 17. $30^\circ 42'$; $59^\circ 18'$. 18. $17,6$ m. 19. $108,4$ m. 20. 32 m; $45,6$ m.

E. Řešení obecného trojúhelníku

1. $c = 6,25$. 2. $a = 5$; $b = 7,5$; $c = 10$.

G. Aplikace řešení trojúhelníků v praxi

1. $164,4$ m. 2. $P = 99\ 640$ cm². 3. $482,4$. 4. $46,1$ m. 5. 28 m. 6. $10,16$ m. 7. $267,1$ m. 8. $19,77$ m. 9. 509 m. 10. 148 m. 11. 158 m.

III. Posloupnosti

A. Definice posloupnosti

2. a) $\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2, \frac{8}{3}, \frac{10}{3}$, roste; b) $5, 3, 1, -1, -3$, klesá; c) $-2, -2, -2, -2$, posloupnost stejných čísel; d) $\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 3, \frac{16}{3}, \frac{25}{3}$, roste; e) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}$, alternující posloupnost; f) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$, roste; g) $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{5}{9}, \frac{6}{11}$, klesá. 3. a) $3, 1, -1, -3, -5$; b) $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}$,

3. $\frac{19}{3}, 13$; c) $5, 5 + d, 5 + 2d, 5 + 3d, 5 + 4d$; d) $1, 2, 1, -1, -2$; e) $0, 1, 1, 2, 3$; f) $\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, 1, -2$. 4. a) $\frac{1}{2^n}$; b) $\frac{1}{n(n+1)}$; c) $(-2)^n$; d) $\frac{5n}{2^n}$; e) $\frac{2n+1}{2n+3}$. 5. a) $\{(-1)^{n-1}\}$; b) $\{2 + (-1)^{n-1}\}$; c) $\{2^{n-1}\}$; d) $\{10n - 5\}$. 6. a) $5n - 4$; b) členy jsou čísla 321 ($n = 65$), 566 ($n = 114$), $2\ 346$ ($n = 114$); c) končící číslicí 1 (nebo $5 - 1 = 4$) nebo 6 (nebo $10 - 4 = 6$). 7. $p = 2, q = 3, \{2 - 3n\}$; $-1, -4, -7, -10, -13, -16, -19, -22, -25, -28$.

B. Aritmetická posloupnost

1. a) $-7, -5\frac{1}{2}, -4, -2\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}$; b) $10, -11\frac{1}{4}, -12\frac{1}{2}, -13\frac{3}{4}, -15, -16\frac{1}{4}, -17\frac{1}{2}$; c) $\frac{5}{8}, 3\frac{1}{8}, 5\frac{5}{8}, 8\frac{1}{8}, 10\frac{5}{8}, 13\frac{1}{8}, 15\frac{5}{8}$; d) $-\frac{15}{16}, -\frac{3}{16}, \frac{9}{16}, \frac{21}{16}, \frac{33}{16}, \frac{45}{16}, \frac{57}{16}$. 2. a) $a_{12} = 9\frac{1}{2}, a_{20} = 21\frac{1}{2}, a_n = 8\frac{1}{2} + \frac{3n}{2}$; b) $a_{12} = -3\frac{3}{4}, a_{20} = -12\frac{1}{2}, a_n = \frac{5}{4}(9 - n)$; c) $a_{12} = 28\frac{1}{8}, a_{20} = 48\frac{1}{8}, a = \frac{5}{8}(4n - 3)$; d) $a_{12} = 7\frac{5}{16}, a_{20} = 13\frac{5}{16}, a_n = \frac{3}{16}(4n - 9)$. 3. 120 . 4. a) $a_1 = -1, d = 0,5$; b) $a'_1 = 0, d' = 2; a''_1 = -9, d'' = 2$; c) $a'_1 = -15, d' = 1; a''_1 = 15, d'' = -1$. 5. $a_1 = 0,9; d = \frac{1}{90}, a_{1\ 000} = 12, S_{1\ 000} = 6\ 450$. 8. a) $\frac{n}{2}(n - 1)$; b) $n(n + 1)$; c) n^2 . 9. $a_1 = 2, d = 2, a_n = 2n$. 10. $a_1 = 1\frac{2}{3}, d = 9\frac{1}{6}$. 11. $4\ 125$ m.

G. Geometrická posloupnost

1. a) $2, 6, 18, 54, 162$, roste; b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}, \frac{1}{162}$, klesá; c) $4, -12, 36, -108, 324$, alternuje; d) $-8, 4, -2, 1, -\frac{1}{2}$, alternuje; e) $-16, -4, -1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{16}$, roste. 3. $Q = \frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{40}$. 4. $q' = 2$,